OLIMPÍADA JUVENIL DE MATEMÁTICA
Prueba Nacional — Valencia, 2 de junio de 2012
Cuarto Año

Apellidos y Nombres:______________________________ **Nº de Cédula:**____________

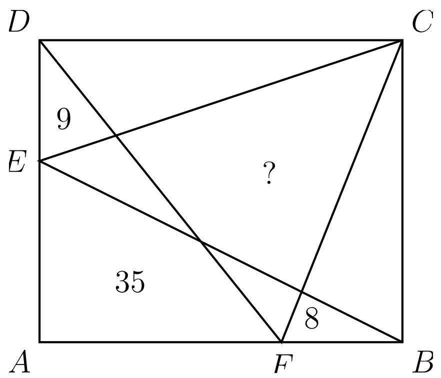
Teléfono(s):______________ **Dirección de correo electrónico:**____________________

Instituto:__________________________ **Ciudad:**____________ **Estado:**____________

(No escriba en esta línea) Puntos: 1_____ **2** _____ **3** _____ **4** _____ **Total:**____________

Todas las respuestas deben justificarse.
Duración de la prueba: 4 horas
Valor de cada problema: 7 puntos

Problema 1. Encuentre todos los enteros a diferentes de cero y de 4, tales que el número $\dfrac{a}{a-4}+\dfrac{2}{a}$ también es un entero.

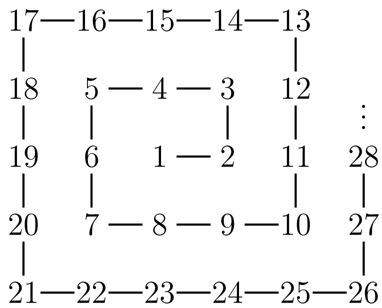


Problema 2. Los segmentos EC, EB, DF y FC dividen al rectángulo $ABCD$ en ocho regiones. En tres de ellas se ha escrito un número que representa su área. ¿Cuál es el área de la región en la que se encuentra el signo de interrogación?

Problema 3. (a) Pruebe que para todo n se cumple

$$n^2-(n+1)^2-(n+2)^2+(n+3)^2-(n+4)^2+(n+5)^2+(n+6)^2-(n+7)^2=0.$$

(b) En el pizarrón están escritos los cuadrados de los números del 1 al 2012: 1^2, 2^2, 3^2,…, 2012^2. Hay que escribir delante de cada número un signo $+$ ó $-$ de manera que, al realizar la suma algebraica de los 2012 números, se obtenga el menor valor positivo que sea posible. Determine cuál es ese mínimo e indique una manera de distribuir los signos para lograrlo.



Problema 4. Consideremos los puntos con ambas coordenadas enteras en el plano cartesiano, en el origen (0,0) se coloca el 1, en (1,0) se coloca el 2, en (1,1) se coloca el 3, y así sucesivamente se van colocando los enteros positivos en espiral alrededor del origen (ver figura). Determine las coordenadas del punto donde se colocará el 2012.

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas
UCV. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Ofic. 331. Los Chaguaramos. Caracas 1020. Venezuela.
RIF J-30755794-0. Telefax 212 605 1512. Página web: `www.acm.ciens.ucv.ve`